

ВНИМАНИЕ!

спасибо за внимание

на правах самописной шпоры

Товарищи, надеюсь, вам больше не придётся тратить своё бесценное время на сей богопротивный предмет, ибо теперь вы обладаете этим дивным материалом. Разумеется, он бесконечно прекрасен, но всё же, в случае обнаружения опечаток или неточностей, пожалуйста, сообщайте о них мне письмом на этот адрес: dovvakkin@gmail.com. Исходный код этого материала вы можете найти здесь: github.com/dovvakkin/shpors/tree/master/fiz3sem. Чуть не забыл самое главное:

Билет 0.

Наш лектор выглядит так:



неподалёку от Москвы – 2019

Анекдоты

1. Физик—ядерщик на корпоративе орал что-то про излучение и разложился на столе.
2. Девушки—медики пьют до потери пульса. Девушки—химики до потери реакции. Девушки—математики — до бесконечности. Так выпьем за девушек—физиков, пьющих до потери сопротивления.
3. Учитель физики: — Ребята, когда в темноте во время грозы вы гладите кота против шерсти, что вам бросается в глаза? Вовочка тянет руку: — Кот!
4. Урок физики в 9—ом классе. Учитель спрашивает: — Дети, кто знает что такое "переменное сопротивление"? Вовочка с задней парты: — Это Люська из 8—го "А"! — ??? — Иногда даёт, а иногда сопротивляется.
5. Какой должна быть идеальная девушка с точки зрения физики? Она должна обладать абсолютно упругим телом и сопротивлением, которым в данный момент можно пренебречь!
6. У нас на первом курсе у парня фамилия Ковбаса. Физик сразу сказал, что ему с такой фамилией обязательно надо написать докторскую.
7. Вопрос по физике из задачника для олимпиад по физике времен СССР: "Может ли космонавт, быстро вращая тяжелым ломом, изменить ориентацию своего спутника?"

1. Кинематика материальной точки

Кинематика - раздел механики, изучающий движения тел без рассмотрения причин движения

Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь

Движение точки по прямой линии

<картинка 1.1>

Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон

Чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон

Чтобы измерить любую физ. величину, нужно ввести единицы измерения

Метр - расстояние, которое проходит свет в вакууме за $\approx \frac{1}{3 \cdot 10^8}$ с

Секунда - продолжительность $\approx 10^{10}$ колебаний электрона в атоме цезия

$x(м)$ - расстояние в метрах

$t(с)$ - время в секундах

$x = x(t)$ - *закон движения точки по прямой линии*

Ось координат - прямая линия, на которой выбрано тело отсчета, положительное направление и единицы измерения длины

<картинка 1.2>

Координаты точки - расстояние от начала отсчета со знаком '+', если точка в положительном направлении и со знаком '-', если в отрицательном

$x = \frac{gt^2}{2}$ - свободное падение

Движение точки на плоскости

<картинка 1.3>

$x(м)$, $y(м)$;

$x(t)$, $y(t)$ - закон движения точки на плоскости

Движение точки в трехмерном пространстве

<картинка 1.4>

$\begin{cases} x(м) \\ y(м) \\ z(м) \end{cases}$ - декартовы координаты

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - закон движения точки в простев

Радиус-вектор точки - вектор, проведенный от начала отсчета к данной матреиальной точке

<картинка 1.5>

$\vec{r}(t) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z; \quad |\vec{r}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Проекция вектора на ось - разность координат конца и начала вектора, взятых по отношению к данной оси

Перемещение - разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени

$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2; \quad r_1 = r_1(t); \quad r_2 = r_2(t)$

<картинка 1.6>

Длительность перемещения: $\Delta t = t_1 - t_2$

Скорость мат. точки - отношение перемещения точки к длительности перемещения в перделе, когда $\Delta t \rightarrow 0$

$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}; \quad v \left[\frac{м}{с} \right]$

Декартовы компоненты скорости: v_x, v_y, v_z

$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}$

$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}$

Модуль скорости:

$|\vec{v}| \equiv v; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Ускорение мат. точки - производная скорости точки по времени

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Декартовы компоненты ускорения:

$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z;$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z) = \vec{i}\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\frac{dv_z}{dt}$

$a_x = \dot{v}_x \equiv \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y \equiv \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z \equiv \ddot{z}$

$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad a \left[\frac{м}{с^2} \right]$

Равномерное прямолинейное движение - движение с постоянной скоростью $v_x = const$

$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x dt = dx; \quad \int_0^t v_x dt = \int_{x_0}^x dx \Rightarrow v_x t = x - x_0$

$x(t) = x_0 + v_x t$

прямолинейное равнопеременное движение $a_x = const$ (оно же равноускоренное или равнозамедленное)

$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt; \quad \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt \Rightarrow v_x - v_{x0} = a_x t$

$v_x = v_{x0} + a_x t$

$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt; \quad \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt \Rightarrow$

$\Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_{x0} + a_x t) dt = v_{x0} t + a_x \frac{t^2}{2}$

$x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad x = \frac{at^2}{2}, \text{ если } x_0 = 0, v_{x0} = 0$

Измерение ускорения

$a = \frac{2x}{t^2} \quad (x_0 = 0, v_{x0} = 0)$

Криволинейное движение точки

Тангенциальное и нормальное ускорение - составляющие ускорения, одна из которых параллельна $\vec{v}$, а другая $\perp$ $\vec{v}$ и направлена к центру кривизны траектории этой точки.

<картинка 1.7>

Круг кривизны кривой в точке - круг, проходящий через данную точку кривой M и две другие точки кривой N, P в пределе, когда $N \rightarrow M, P \rightarrow M$

Найдём тангенциальное и нормальное ускорение:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v, \quad |\vec{\tau}| = 1, \quad |\vec{n}| = 1$

$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot a_\tau + \vec{n} \cdot a_n$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} \cdot v) = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad (\ominus)$

$d\vec{\tau} = \vec{n}|d\vec{\tau}|; \quad \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \{\text{подоб. тр.уг.}\} = \frac{dr}{R} \Rightarrow |d\vec{\tau}| = \frac{dr}{R} \Rightarrow d\vec{\tau} = \vec{n} \frac{dr}{R}$

$(\ominus) \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + v \cdot \vec{n} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dr}{dt} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \frac{v^2}{R}$

<картинка 1.8>

Найдём радиус кривизны кривой:

<картинка 1.9>

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad |'_y$

$y(x) = f(x); \quad y'(x) = f'(x); \quad y''(x) = f''(x)$

$2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0 \quad | : 2$

$(x - x_c) + (y - y_c)y' = 0 \quad |'_y$

$1 + y'^2 + (y - y_c)y'' = 0$

$y - y_c = -\frac{1 + y'^2}{y''}; \quad x - x_c = \frac{1 + y'^2}{y''} y'$

$(\frac{1 + y'^2}{y''})^2 (y'^2 + 1) = R^2 \Rightarrow R = \frac{|1 + y'^2|^{3/2}}{|y''|}$

2. Относительность механического движения

Относительность механического движения - различие движения одного и того же тела относительно разных тел отсчета

<картинка 2.1>

* неподвижная с.о.

** подвижная с.о.

$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_o + \dot{\vec{r}}' \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}'$

$\vec{v}$ - абсолютная скорость

$\vec{v}_o$ - относительна скорость

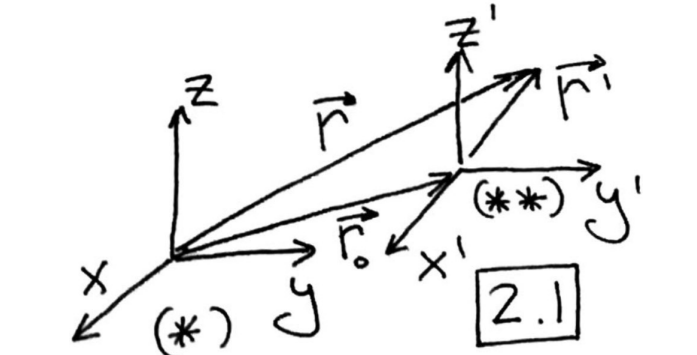
$\vec{v}'$ - скорость системы отсчета

абсолютная скорость = относительной скорости + скорости системы отсчета

$a_{\vec{a}bc} = a_{\vec{a}tn} + a_{\vec{c},o}$

Эти формулы справедливы при поступательном движении подвижной системы отсчета

Поступательное движение - движ. при котором ориентация осей подвижной системы не меняется



3. Принцип относительности. Преобразования Галилея

Принцип относительности Галилея: Никакими мех. опытами, проведёнными внутри данной с.о. нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно и прямолинейно движется.

Математическая формулировка: Ур-я, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразования, описывающего переход от неподвижной с.о. к системе, движущейся равномерно и прямолинейно.

<картинка 3.1>

Будем отсчитывать время от момента, когда начала обеих систем отсчёта совпадают.

$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$ - преобразования Галилея

$\begin{cases} v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$ - правило сложения скоростей Галилея

В XIX веке выяснилось, что ур-я электромагнитного поля не инвариантны относительно преобразования Галилея.

Было решено проверить правило сложения скоростей Галилея для электромагнитных волн.

Майкелсон решил использовать в качестве подвижной с.о. земной шар в движении вокруг Солнца.

<картинка 3.2>

$v = 3 \cdot 10^4 \frac{м}{с} \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$

Гипотеза неподвижного эфира:

Предположение о том, что скорость света относительно Солнца = c, а отн. Земли она определяется правилом Галилея

$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v'_x + v \\ v_y = v'_y \end{cases}$

Продольная и поперечная скорости света:

1) - скорость света относительно Земли в направлении её движения по орбите.

2) - скорость света относительно Земли в направлении, $\perp$ направлению её движения по орбите.

$v_{||} = |v'_x|, v'_y = 0; \quad v_{\perp} = |v'_y|, v'_x = 0$ (*)

$v_{||} = c \pm v \quad v_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$ (**)

$v_{||} \neq v_{\perp}$ [3.3]

Интерференция света - взаимная компенсация действия световых волн в некоторых точках пространства.

<картинка 3.3>

* свет; ** темнота

свет + свет = темнота

Интерферометр Майкельсона

<картинка 3.4>

$\frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ - свет

$\frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{T}{2}, \quad T = \frac{\lambda}{c}$ - темнота

T - период световой волны

$l_1 \approx l_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{c}{v} \right)^2, \quad \lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$

Опыт показал, что повороты прибора не меняли наблюдаемую интрерф. картину.

Вывод: гипотеза неподвижного эфира ошибочна.

Движение земного шара не играет роли.

Принцип постоянства скорости света: скорость света не зависит от того, по отношению к какой с.о. (покоящ. или движ.) она определяется.

Относительность времени

$v_{abc} = v_{отн} = c$

$x = ct \quad (1) \quad x' = ct' \quad (2)$

$t \neq t' \Rightarrow$! время течёт по-разному

$x, y, z, t \rightleftharpoons x', y', z', t'$

$x = x' + vt' \quad (3) \quad t = t' + \frac{vx'}{c^2} \quad (4)$

Формулы (1) – (4) совместны

$x' = x - vt \quad (5) \quad t' = t = \frac{vx}{c^2} \quad (6)$

Формулы (1), (2), (5), (6) совместны

(3) – (6) не совместны (система вырождена)

$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y = y' \quad z = z'$

Преобразования Лоренца

Оказалось, что ур-я эл. магн. поля инвариантны относительно преобразования Лоренца.

Принцип относительности Эйнштейна: ур-я, выражающие физические законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Пример: сложение скоростей в теории относительности:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$
$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dt = \frac{dt' + \frac{v x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$v_x = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v x'}{c^2}} = \frac{v'_x + v}{1 + v'_x \frac{v}{c^2}}$$

4. Кинематика твердого тела

Твердое тело - система материальных точек, расстояние между любой парой которых, всегда остается неизменным
Поступательное движение тела - движ. при котором ориентация тела в пространстве не меняется. В этом случае скорости всех точек тела одинаковы
Вращение вокруг неподвижной оси - движ. при котором все точки тела движутся по окружности, а центры всех окружностей лежат на одной прямой - оси вращения
Зададим угол φ в радианах
<картинка 4.1>

φ = S/R; S = Rφ

S - длина дуги в радианах
R - радиус окружности

φ = φ(t) - закон движения
<картинка 4.2>

v = dr/dt ≈ dS/dt = r⊥ dφ/dt = r⊥ φ̇

Угловая скорость вращения тела - производная угла поворота тела по времени

ω = dφ/dt = φ̇ [рад/с]; v = ωr⊥

Вектор угловой скорости тела - вектор, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта и равный по модулю производной угла поворота тела по времени
<картинка 4.3>

v̄ = [ω, r̄]; v = ωr sin α = ωr⊥

Проекция вектора угловой скорости на ось вращения тела равна производной угла поворота тела по времени при условии, что направление отсчета угла связано с направлением оси правилами правого винта ωz = φ̇
<картинка 4.4>

Движение тела с одной неподвижной точкой

Т. Эйлера: движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления

v̄ = [ω, r̄]; ω = ω(t)

ω направлен вдоль мгновенной оси вращения тела и = по модулю производной угла поворота тела по времени
Мгновенная ось вращения - прямая линия, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела
Матрица поворота тела - матрица, составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем (лабораторных и системы тела)
<картинка 4.5>

Si,j = {скаляр. произвед} = (ēi, ēj'); i, j = 1, 2, 3

S = [ē1ē1' ē1ē2' ē1ē3' ē2ē1' ē2ē2' ē2ē3' ē3ē1' ē3ē2' ē3ē3']

Пример поворот на 90 градусов
<картинка 4.6>

S = [1 0 0 0 0 -1 0 1 0]

Преобразование компонент вектора при повороте с.о

r̄ = ē1x1 + ē2x2 + ē3x3 | · (ē1)

x1 = S12x'1 + S12x'2 + S13x'3 = ∑j=1 3 Si,j x'j

Двойной поворот

xi = ∑j=1 3 Aij x'j; x'j = ∑k=1 3 Bjk x''k ⇒ xi = ∑j=1 3 Aij ∑k=1 3 Bjk x''k =

= ∑k=1 3 x''k ∑j=1 3 Aij Bjk = ∑k=1 3 Cik x''k

5. Кинематика вращающихся систем отсчета

Установим связь между кинематическими характеристиками точки относительно 2-х с.о. - неподвижной и вращающейся
<картинка 5.1>

ω̄ = const; r̄ = r0 + r' ⇒ d r̄ = dr0 + dr'

r̄ = ē1'x'1 + ē2'x'2 + ē3'x'3 - все величины могут зависеть от времени

dr̄ = ē1'dx'1 + ē2'dx'2 + ē3'dx'3 + x'1dē1' + x'2dē2' + x'3dē3'

* = d' r' - относительноно вращающейся с.о.
** = [ω, ē1'x'1 + ē2'x'2 + ē3'x'3]dt = [ω, r']dt

v̄ = [ω, r̄] = dr̄/dt ⇒ d r̄ = [ω, r̄]dt - описывает приращение любого вектора, жестко связанного с вращающейся с.о.

dēi' = [ω, ēi'], i = 1, 2, 3 ⇒ dr' = d' r' + [ω, r']dt

связь скоростей:

d r̄ = dr0 + d' r' + [ω, dr']dt | : dt

v̄ = v0 + v' + [ω, r']

d v̄ = dv0 + d v' + [ω, dr']; v̄ = v'1'x'1 + v'2'x'2 + v'3'x'3; d v̄ = d' v' + [ω, v']dt

d v̄ = dv0 + d' v' + [ω, v']dt + [ω, d' r' + [ω, r']dt] | : dt

ā = a0 + a' + 2[ω, v'] + [ω, r']̇

ā = a' + a''n + a''κ

<картинка 5.2>

a''n = a0 + [ω, [ω, r']] - переносное ускорение

a''κ = 2[ω, v'] - кориолисово ускорение

[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b) - линал, 1 сем

r' = r'1' + r'1'⊥ ⇒ [ω, r'] = [ω, r'1'⊥]

[ω, [ω, r']] = [ω, [ω, r'1'⊥]] = ω̄(ω, r'1'⊥) - r'1'⊥ω2 = 0

a''κc = -ω2r'1'⊥ - центробежное ускорение

a''n = a0 + a''κc

6. Законы Ньютона

1) Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

2) Произведение массы мат. т. и её ускорения равно действующей на неё силе:

mā = F̄

3) Действия двух тел друг на друга равны и противоположно направлены:

F̄12 = -F̄21

Масса - мера отклика тела на действие силы.

Сила - мера действия на данное тело других тел.

1 килограмм - масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия (φ = 39мм, h = 39мм).

1 Ньютон - сила, вызывающая ускорение 1 м/с² у тела m = 1 кг

Чтобы измерить m, подействуем силой в 1 Н и измерим ā = 2S/t²

Чтобы измерить F̄, подействуем ею на тело m = 1 кг и измерим ā

Опытная проверка 2-го закона Ньютона.

Отметим 2 случая, когда второй закон Ньютона неприменим:

1) тело движ. с v ~ c = 3 · 10⁸ м/с

2) движение очень маленьких тел в очень маленьких областях пространства (электроны в атомах)

Силы взаимодействия тел, приложенные к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

Сложение сил

Если на точку одновременно действуют 2 силы, то она начинает двигаться так, как если бы действовала 1 сила, равная векторной сумме первых двух сил.

<картинка 6.1>

F̄ = F̄1 + F̄2

Импульс материальной точки - произведение массы точки и её скорости:

p̄ = mv̄ [кг·м/с]

II закон Ньютона в импульсной форме: скорость изменения импульса мат. т. равна действующей на неё силе:

p̄̇ = F̄

7. Силы в механике

Любые две матер. точки притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними

<картинка 7.1>

F̄ ~ m1m2/r²; F̄ = G m1m2/r²; G = 6.6 · 10⁻¹¹ [Н·м²/кг²]

G - гравитационна постоянная
Принцип суперпозиции: каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как если бы других частиц не было
<картинка 7.2>

F̄ = F̄1 + F̄2 + ...

F̄ = ∑i,j F̄ij

<картинка 7.3>

Пример: притяжение мат. точки к однородному шару

<картинка 7.4>

Расчет показывает, что F̄ притяжения такова, как если бы вся масса шара находилась в его центре F̄ = G mM/r²

Взвешивание Земли

mg = G mM/R² ⇒ M = g R²/G ≅ 6 · 10²⁴ кг

Измерение радиуса Земли

<картинка 7.5>

α = S/R ⇒ R = S/α ≅ 6400 км

Факты, подтверждающий закон всемирного тяготения

1. Период обращения Луны

<картинка 7.6>

māц = mω²r = m v²/r = G Mm/r² ⇒ v = √(GM/r)

T = 2πr/v = 2πr√r/GM = {r ≅ 384000 км} ≅ 27 суток

2. Одинаковое g для всех тел вблизи поверхности Земли

mg = G mM/R² ⇒ g = G M/R²

Сила упругости - сила, препятствующая деформации упругих тел
Упругое - тело, которое восстанавливает свою форму после прекращения действия силы

Закон Гука - сила упругости пропорциональна величине деформации

<картинка 7.7>

F̄ ~ x; F = kx; Fx = -kx

k [Н/м] - коэффициент упругости

Закон Гука - не фундаментальный физич. закон, а приближенное соотношение, верное при не слишком большой деформации

Сила трения - сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел

Трение покоя - трение в отсутствии относ. перемещения соприкасающихся тел
<картинка 7.8>

F̄ + F̄ = 0 ⇒ F̄ = -F̄

опыт показывает, что сила трения покоя ограничена сверху

Fтр ≤ Fmax

Сила нормального давления - составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения

N[H] Fmax ~ N Fmax = μN

Пример:

<картинка 7.9>

μ = tg α

Трение скольжения - опыт показывает, что сила трения скольжения ≈ Fmax

Fтр = μN - не фундаментальный закон, а приближенное равенство

Вязкое трение - трение, препятствующее движению тела в сплошной среде

Особенности:

1) нет трения покоя

2) сила вязкого трения ~ скорости движения: Fтр ~ v

Электро-магнитные силы

Эл. заряд - мера электрического взаимодействия тел

Эл. поле - поле, создаваемое эл. зарядами и проявляющее себя действием на электрические заряды

Направленность электрического поля - мера действия поля на заряд

Ē = F̄/q F̄ = qĒ - сила Кулона

F̄ = q[ṽ, B̄] - закон Лоренца, B̄ - магнитная индукция

F̄ = qĒ + q[ṽ, B̄]

Релятивистское ур-е движения

смысл: ур-е, обобщающее 2-ой закон Ньютона на случай движения тел с большими скоростями

p̄ = F̄; p̄ = mṽ/√(1-v²/c²); F̄ = qĒ + q[ṽ, B̄]

Идея вывода:

1. вводим сопровождающую систему отсчета v(t) = 0 ⇒ подчиняется 2-ому закону Ньютона mā = F̄

2. переходим к неподвижной с.о., оси которой || осям сопровождающей системы: ā1 → ā2, F̄1 → F̄2 - преобразования Лоренца

3. поворот системы координат (м-ца поворота)

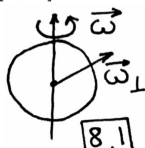
8. Неинерциальные с.о. Силы инерции

Система отсчета неинерциальна, если относ. нее любое тело, ∞ удаленное от других тел, не испытывает ускорение с.о., связанная с Землей - инерциальная с.о. с.о., движущаяся с большим ускорением (т.е. которым нельзя пренебречь) относительно Земли - неинерциальная с.о. Выведем ур-е движения матер. точки относительно неинерциальной с.о.

$$m\vec{a} = \vec{F} \text{ -инерц. с.о.}$$
$$m\vec{a} + m\vec{a'} - m\vec{a'} = \vec{F}; \vec{a} \text{ - ускор. мат. точки относ. ИСО}$$
$$m\vec{a'} = \vec{F} - m(\vec{a} - \vec{a'})$$

сила инерции - добавочная сила, действующая на мат. точку вне ИСО и определяемая формулой: $\vec{F}_{ин} = -m(\vec{a} - \vec{a'})$

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_n} + \vec{a_k}; \quad \vec{a_n} = \vec{a_0} - \omega^2 r_{\perp}'; \quad \vec{a_k} = 2[\vec{a}, \vec{v}']$$
$$\vec{a_n} \text{ - переносное ускор-е; } \vec{a_k} \text{ -кориолисово ускор-е}$$
$$\vec{F}_{ин} = \vec{F_n} + \vec{F_k}; \quad \vec{F_n} = -m\vec{a_0} + m\omega^2 r_{\perp}';$$
$$\vec{F_k} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']; \quad \vec{F_{ц.б}} = m\omega^2 r_{\perp}'$$



В северном полушарии на тела, движущиеся по поверхности земли, действует $\vec{F_k}$, направленная вправо <картинка 8.1>

Маятник Фуко
Плоскость колебания маятника медленно поворачивается вокруг вертикальной оси - этот опыт доказывает вращение Земли
Св-ва сил инерции
1) силы $\neq 0$ только для наблюдателя, связанного с ИСО
2) нельзя указать тело, со стороны которого приложены силы инерции
3) не подчиняются 3-ему закону Ньютона
Невесомость - исчезновение веса тела, вызванное ускорением с.о.
Перегрузка - возрастание веса тела, вызванное ускорением с.о.
Центрифуга - устройство, использующее центробежную силу инерции.

9. Импульс системы частиц. Движение центра масс

$$\vec{p} = m\vec{v}$$
Импульс системы частиц - $\sum$ импульсов отдельных частиц системы:
$$\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \vec{v_i}$$

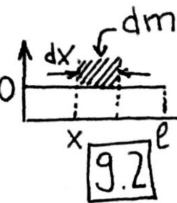
Центр масс системы частиц - точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

$$\vec{r_c} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r_i}, \quad m = \sum_i m_i$$
$$\vec{r_c} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2}$$



=> для однородных систем тел центр масс находится в геом. центре.
Пример: центр масс стержня:
<картинка 9.2>

$$dm = \frac{m}{l} dx; \quad x dm = \frac{m}{l} x dx$$
$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i x_i m_i = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \frac{l}{2}$$



Скорость и ускорение центра масс:

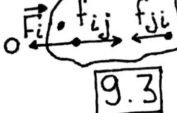
$$\vec{v_c} = \dot{\vec{r_c}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v_i}$$
$$\vec{a_c} = \dot{\vec{v_c}} = \ddot{\vec{r_c}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a_i}$$
$$\Rightarrow \vec{p}_{свст. ч.} = \sum_i m_i \vec{v_i} = m\vec{v_c}$$

Импульс $\forall$ системы частиц таков, как если бы вся масса системы находилась в её центре масс.

Закон движения центра масс:
Внутренние силы - силы взаимодействия между телами в данной системе.

$$\vec{f_{ij}}$$
 действует на точку i со стороны точки j
Внешние силы - силы, действующие на тела со стороны тел, не входящих в данную систему.
<картинка 9.3>

$$m_i \vec{a_i} = \sum_j \vec{f_{ij}} + \vec{F_i} \Big| \sum_i$$
$$\sum_i m_i \vec{a_i} = \sum_i \sum_j \vec{f_{ij}} + \sum_i \vec{F_i}; \quad \vec{f_{ij}} = -\vec{f_{ji}}; \quad \vec{f_{ij}} + \vec{f_{ji}} = 0$$



Для $\forall$ пары частиц системы сумма внутренних сил = 0 => для системы в целом сумма внутренних сил = 0

$$\sum_i m_i \vec{a_i} = \{m\vec{a_c}\} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{F}_{внеш} \Rightarrow m\vec{a_c} = \vec{F}_{внеш}$$

Закон движения центра масс: центр масс в мех. системе движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы.

10. Закон сохранения импульса

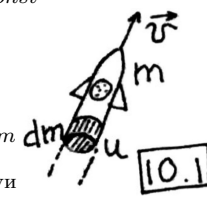
$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v_i} \quad \dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \vec{a_i} = \vec{F}_{внеш.} \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}_{внеш.}$$

Скорость изменения импульса мех. системы равна сумме внешних сил.

$$\vec{F}_{вн.} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const$$

ЗСИ относительно оси:
Если $\exists$ такая ось, в проекции на которую $\vec{F}_{вн.} = 0$, то в направлении этой оси импульс сохраняется.

$$\vec{F}_{вн.}^{(*)} = 0 \Rightarrow p_x = \sum_i m_i v_{ix} = const$$



Реактивное движение:
<картинка 10.1>

$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u} dm$$
$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{c}, \quad \vec{c} \text{ - скорость струи}$$
$$m\vec{v} = m\vec{v} + m d\vec{v} - \vec{v} dm - dm d\vec{v} + \vec{v} dm + \vec{c} dm$$
$$m d\vec{v} = -\vec{c} dm \mid : dt$$
$$m\vec{a} = -\vec{c} \frac{dm}{dt} = -\vec{c} \dot{m} \equiv -\vec{c} \mu, \quad \mu \text{ - скорость расхода } m$$
$$\vec{F}_{реак} = -\mu \vec{c}$$

Найдём стартовую массу ракеты:

$$m \frac{dv}{dt} = \mu c \text{ - уравнение движения}$$
$$m = m(t) = m_0 - \mu t$$
$$\frac{dv}{c} = \frac{\mu dt}{m} \Rightarrow \frac{dv}{c} = \frac{\mu dt}{m_0 - \mu t}$$
$$\frac{1}{c} \int_0^v dv = \mu \int_0^t \frac{dt}{m_0 - \mu t}$$
$$\frac{v}{c} = \ln \frac{m_0}{m} \Rightarrow \frac{m_0}{m} = e^{(v/c)}$$

Пример ракеты "Энергия":

$$c = 3 \cdot 10^3 \frac{м}{с}; \quad \mu = 10^4 \frac{кг}{с}; \quad m = 10^5 \text{ кг}; \quad v = 10^3 \cdot 8 \frac{м}{с}$$
$$\Rightarrow F_{реак} = 3 \cdot 10^7 \text{ Н} \quad m_0 = 2000 \text{ тонн}$$

11. Работа и потенциальная энергия

Элементарная работа - скалярное произведение силы на $\vec{v}(1)$ перемещение точки приложения силы:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad [Н \cdot м = Дж]$$

1 Дж - работа, которую совершает сила = 1 Н при перемещении точки приложения силы на 1 м в направлении приложения силы.

$$A = \int dA \quad dA = F \cdot dr \cdot \cos \alpha$$

Полная работа = $\sum$ элементарных работ.
Потенциальная сила - сила, работа которой равна 0 при перемещении точки приложения силы по $\forall$ замкнутому контуру. ($\vec{F}_г$, $\vec{F}_{упр}$, $F_{кул}$)
Пример не потенциальной силы - $\vec{F}_{тр}$, мышечная сила.

Элементарная потенциальная энергия - эл. работа потенциальной силы, взятая со знаком минус:

$$d\Pi = -dA_{П}$$

Потенц. энергия = $\sum$ элем. потенц. энергий: $\Pi = \int d\Pi$

Связь силы и потенциальной энергии:

$$d\Pi = -dA_{П} = -\vec{F} d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \Rightarrow F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z = -(\vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}) = -grad \Pi$$

① П мат. точки в поле силы тяжести:
<картинка 11.1>

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -m\vec{g} d\vec{r}$$
$$d\Pi = mg dz; \quad \Pi = \int d\Pi = mg \int_0^z dz = mgz$$

② П тела в поле силы тяжести:
<картинка 11.2>

$$\Pi = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i = \left\{ \vec{r_c} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r_i} \right\} = g m z_c$$
$$\Rightarrow z_c \cdot m = \sum_i m_i z_i$$

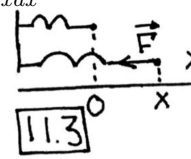
Потенциальная энергия системы частиц - сумма потенциальных энергий отдельных частиц системы:

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

Π тела в поле силы тяжести таково, как если бы вся масса тела находилась в его центре масс.

③ П пружины:
<картинка 11.3>

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -F_x dx = k x dx$$
$$\Pi = \int d\Pi = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}$$



④ П мат. точки в поле центральной силы:
Центральная сила - сила, направленная всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром.
<картинка 11.4>

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad \vec{F} = F(-\frac{\vec{r}}{r})$$
$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = F \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = \frac{F}{r} \vec{r} d\vec{r}$$
$$\vec{r} d\vec{r} = x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$
$$d\Pi = F dr$$
$$\Pi = \int d\Pi = GMm \int \frac{dr}{r^2} = GMm \int_{r_0}^r d(-\frac{1}{r}) = GMm(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0})$$
$$r_0 = \infty \Rightarrow \Pi = -\frac{GMm}{r}$$



12. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия мат. точки - величина, опред. формулой:

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж} \right]$$

Закон изменения K :

$$\text{по II з. Ньютона: } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \mid \cdot d\vec{r}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r} = dA$$

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m \vec{v} d\vec{v} = m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

⇒ Приращение K мат. т. = работе действующей на неё силы

K системы частиц - сумма K отдельных частиц системы

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

① K твёрдого тела при поступательном движении:

$$v_i = v \Rightarrow K = \frac{mv^2}{2}$$

② K тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:
<картинка 12.1>

$$v_i = \omega r_{i\perp}$$
$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = I \frac{\omega^2}{2}$$

Момент инерции тела относительно данной оси - величина, опред. формулой:

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

③ K тела, совершающего плоское движение:

Плоское движение - движение, при котором все точки тела движутся || некоторой неподвижной плоскости:
<картинка 12.2>

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) =$$

$$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2 + \underbrace{\vec{v}_c \sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0^*}$$

$$* \sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i \vec{v}_i - m \vec{v}_c = 0$$

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2$$

K = сумме K движения центра и K движения относительно центра.

В частности, при плоском движении твёрдого тела:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad \text{- теорема Кёнига}$$

I - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

13. Закон сохранения энергии в механике

Полная механическая энергия $= K + \Pi \overset{\text{дет}}{=} E$

Закон изменения полной энергии:

Рассмотрим мат. точку, которая движется под действием потенц. и непотенц. силы
<картинка 13.1>

$$dK = dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}_{\Pi} d\vec{r} + \vec{F}_{\text{НП}} d\vec{r} = dA_{\Pi} + dA_{\text{НП}} = -d\Pi + dA_{\Pi}$$
$$\Rightarrow d(K + \Pi) = dA_{\Pi} = dE$$

$dE = dA_{\text{НП}}$ - приращение полной механической энергии системы равно работе непотенциальных сил

Если $A_{\text{НП}} = 0$, то полная мех. энергия системы сохраняется:
 $E = \text{const}$

$A_{\text{НП}} = 0 \Rightarrow E = K + \Pi = \text{const}$ - закон сохранения энергии в классической механике

Пример скатывание санок с горы:

<картинка 13.2>

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \quad v = \sqrt{2gh}$$

14. Импульс и энергия в теории относительности

Скорость света $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Релятивистский импульс материальной точки - величина, определяемая формулой: $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$\text{Релятивистская энергия} - E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\text{для системы частиц: } \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \quad E = \sum_i E_i$$

Если $\sum$ внешних сил = 0, то $\vec{p}$ и E сохраняются, эти два закона действуют всегда вместе.

Закон сохранения энергии ($A_{\text{НП}} = 0 \Rightarrow E = K + \Pi = \text{const}$) - следствие закона сохранения импульса и принципа относительности.

Пример неупругий удар:

<картинка 14.1>

$$\frac{m\vec{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m\vec{v}_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = 0 \quad M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 2m(!)$$

Это означает, что возможны взаимные превращения массы и энергии.

Пример деление ядра урана:

<картинка 14.2>

$$E = (m - m_1 - m_2)c^2$$

Пример фотон:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$E \cdot \vec{v} = \vec{p}c^2$

$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$

Положим, что $m = 0$ (у некоторых частиц) $\Rightarrow$ для таких частиц $E = pc$

Фотон - это частица, энергия и импульс которой связаны соотношением $E = pc$ и скорость которой равна c в любой системе отсчёта. Отсюда вывод: свет оказывает давление на поглощающие, отражающие и преломляющие свет тела.

$$F = \dot{p} = \frac{\dot{E}}{c} = \frac{P}{c}, \quad P - \text{мощность света}$$

Сила светового давления - отношение мощности света к s .

$$F_{\text{с.д.}} = \frac{P}{c} \quad P = 10^3 \text{ Вт} \Rightarrow F \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$$

15. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы

Момент импульса частицы - векторное произведение $\vec{r}$ частицы и ее импульса

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad \left[m \cdot \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$$

момент импульса системы частиц - сумма моментов импульса отдельный частиц системы

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

момент сил - векторное произведение $\vec{r}$ точки приложения силы и вектора силы

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad [H \cdot m]$$

момент относительно оси - проекция вектора момента на эту ось. Найдем момент силы относительно оси. Разложим $\vec{r}$ и $\vec{F}$ на составляющие || и $\perp$ оси

<картинка 15.1>

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}; \quad \vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp};$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}] = \underbrace{[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}]}_{\text{ко-арны}} + \underbrace{[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}]}_{\vec{M}_{\perp}} + \underbrace{[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{\parallel}} =$$

$$= 0 + \vec{M}_{\perp} + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]$$

Чтобы найти составляющие момента || некоторой оси, нужно взять в векторном произведении компоненты векторов, $\perp$ этой оси

$$\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{\perp}, m\vec{v}_{\perp}]$$

Момент импульса матер. точки

<картинка 15.2>

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad N = mvr \sin \alpha = mvR$$

R - расстояние от начала отсчета до линии движения точки

Момент силы матер. точки

<картинка 15.3>

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]; \quad M = Fr \sin \alpha = FR$$

R - плечо силы

Момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Найдем составляющую $\vec{N}_{\parallel}$, параллельную оси вращения

<картинка 15.4>

$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_i]; \quad \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]$$

$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

I - момент инерции

Момент импульса относительно оси вращения

<картинка 15.5>

$$N_z = \omega_z I; \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

Момент импульса тела при произвольном движении

<картинка 15.6>

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}; \quad \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}] = m [\vec{r}_c, \vec{v}_c] + [\vec{r}_c, \sum_i m_i \vec{v}_{ic}] +$$

$$\underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0^*}$$

$$+ \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c}_{=0^{**}} + \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}] = \{ r_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i; v_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i \} =$$

$$= \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}, \text{ где}$$

$$\vec{N}_c = m [\vec{r}_c, \vec{v}_c] \text{ - пост}$$

$$\vec{N}_{oc} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}] \text{ - вращ}$$

$$* \sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i \vec{v}_i - m \vec{v}_c = 0$$

** - аналогично

Плоское движение

найдем составляющие момента импульса || оси вращения

<картинка 15.7>

$$\vec{N}_{\parallel} = \vec{N}_{c\parallel} + \vec{N}_{oc\parallel}; \quad \vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + I\omega \quad (I = I_c)$$

$\vec{N}_{c\parallel}$ - м.и. центра масс

$\vec{N}_{oc\parallel}$ - м.и. относительно центра масс

20. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты

связи в механике - невытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механической системы

<картинка 20.1>

В системах со связями действуют силы двух типов: заданные и силы реакции
заданные - известные постоянные силы или известные функции координат и скоростей частиц

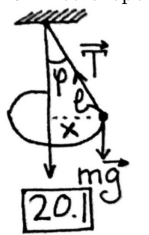
силы реакции -силы, которые действуют на тела системы со стороны тел, осуществляющих связи.

$$m\ddot{\vec{r}}=m\vec{g}+\vec{T}$$

$$x: m\ddot{x}=T_x \Rightarrow T_x=-T\cdot \sin \phi$$

$$y: m\ddot{y}=mg+T_y \Rightarrow T_y=-T\cdot \cos \phi$$

$$x(t)-?, \; y(t)-?, \; T(t)-?$$



Классификация связей

голономная - связь, которая сводится к ограничениям только на координаты тел: $x^2+y^2=l^2$

неголономная - наче

Далее рассмотрим только голономные связи

стационарная - связь, уравнение которой не содержит времени в явном виде: $x^2+y^2=l$

нестационарная - иначе: $x^2+y^2=l(t)$

число степеней свободы системы - число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве (S)
обобщенные координаты - любые S координат, полностью определяющие положение системы в пространстве: $q_i, \; i=1\ldots s; \{q\}$
обобщенные скорости - производные по времени обобщенных координат: $\dot{q}_1\ldots \dot{q}_s; \{\dot{q}\}$

Если система состоит из отдельных мат. точек, то $S=3N-K$, где N - число точек, K - число связей

<картинка 20.2>

$$a: S=6; \quad b: S=5; \quad c: S=6$$

$$d: S=6 \text{ -произвольное твердое тело}$$

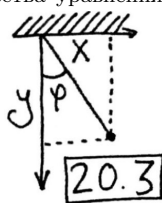
Радиус-векторы точек системы являются однозначными функциями обобщенных координат $\vec{r}_l=\vec{r}_l(q_1, q_2, \ldots q_s, t), \; l=1\ldots N$
обобщенные координаты обращают в тождества уравнения связи

<картинка 20.3>

$$S=1; \; q=\phi$$

$$\begin{cases} x=l\sin \phi \\ y=l\cos \phi \end{cases}$$

$$x^2+y^2=l^2$$



21. Виртуальное перемещение. Виртуальная работа. Идеальные связи

виртуальное перемещение - это воображаемое о(1) премещение точки, допускаемое связями в данный момент времени t:

$$\vec{r}_l=\vec{r}_l(q_1, q_2, \ldots q_s, t)$$

q_j - обобщенная координата

Положим $t=const$ и возьмём дифференциал радиус-вектора точки:

$$\delta \vec{r}_l=\sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta A=\vec{F}\delta \vec{r}$$

виртуальная работа - это работа силы на виртуальное перемещение

идеальные связи - это связи, для которых виртуальная работа сил реакции = 0

$$\delta A_R=\sum_{l=1}^N \vec{R}_l \delta \vec{r}_l=0$$

Примеры

1. идеально гладкая поверхность

<картинка 21.1>

$$\delta A=\vec{F}\delta \vec{r}=0$$

2. качение без проскальзывания

<картинка 21.2>

$$\delta A=\vec{F}\delta \vec{r}=0$$

$$(\text{т.к.}\delta \vec{r}_1=0)$$

3. жесткой невесомый стержень

<картинка 21.3>

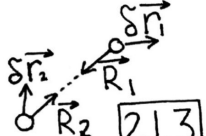
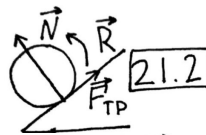
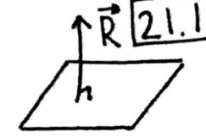
$$\vec{R}_1=-\vec{R}_2$$

$$\delta A_R=\vec{R}_1\delta \vec{r}_1-\vec{R}_2\delta \vec{r}_2=\{\text{скаляр. произв.}\}=(\vec{R}_1, \delta \vec{r}_1-\delta \vec{r}_2)=$$

$$=(\vec{R}_1, \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2))=(\vec{R}_1, \delta \vec{r})$$

$$R_1=\alpha r \Rightarrow \delta A_R=\alpha \vec{r}\Delta \vec{r}=\alpha r\delta r=\frac{1}{2}\alpha \delta(l^2)=$$

$$=\{\delta(l^2)=0 \text{ т.к. дифф. от конст.}\}=0$$



22. Уравнения Лагранжа. Обобщённые силы

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями.

q_j - обобщенная координата, R_j - сила реакции

N - число связей, S - число степеней свободы

$$\vec{r}_l=\vec{r}_l(q_1, \ldots, q_s, t)$$

$$\delta \vec{r}_l=\sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j; \; \delta A_R=\sum_{l=1}^N \vec{R}_l \delta \vec{r}_l=0$$

$$m_l \ddot{\vec{r}}_l=\vec{F}_l+\vec{R}_l, \; l=1, \ldots, N$$

Исключим силы реакции (умножим на $\delta \vec{r}_l$, просуммируем)

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l-\vec{F}_l) \delta \vec{r}_l=0$$

Подставим сюда выражение $\delta \vec{r}_l$

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l-\vec{F}_l) \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j=0$$

$$\sum_{j=1}^S \delta q_j \sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l-\vec{F}_l) \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}=0$$

обозначим:

$$\sum_{l=1}^N m_l \ddot{\vec{r}}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}=X_j, \quad \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}=Q_j$$

$$\sum_{j=1}^S (X_j-Q_j) \delta q_j=0$$

$$\Rightarrow X_j=Q_j \; \forall j \in [1, S]$$

Покажем, что X_j можно выразить через кинетическую энергию системы:

$$X_j=\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$K=\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l v_l^2=\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \vec{v}_l; \; \vec{v}_l=\dot{\vec{r}}_l, \; \vec{r}_l=\vec{r}_l(q_1, \ldots, q_s, t)$$

$$\vec{v}_l=\sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t} \Big|_{q_j} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

$$\vec{v}_l=\vec{v}_l(q, \dot{q}, t); \quad K=K(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l^2=\sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \ddot{\vec{r}}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}}_{X_j} + \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_l}{\partial q_j}}_{\frac{\partial K}{\partial q_j}}$$

$$X_j=\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

В уравнении $X_j=Q_j$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j} \quad - \text{уравнение Лагранжа относительно кинетической энергии}$$

Обобщённая сила - величина, определяемая формулой

$$Q_j=\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}; \; j=1, \ldots, S$$

$$Q=\frac{H \cdot M}{[q]} \quad \begin{matrix} [q]=\text{метры} \Rightarrow [Q]=\text{Н} \\ [q]=\text{радианы} \Rightarrow [Q]=\text{Н} \cdot \text{м} \end{matrix}$$

По своему физическому смыслу обобщённая сила представляет собой проекцию силы на ось, либо момент силы относительно оси.

23. Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы

Рассмотрим системы с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами

$$\vec{F}_l=-grad \Pi_l; \quad \Pi_l=\Pi_l(q, t)$$

Π - потенциальная энергия; q_j - обобщенная координата

$$\vec{F}_l=-\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l} \right)$$

$$\vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}=-\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial q_j} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial q_j} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial q_j} \right)$$

$$Q_j=\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \Rightarrow Q_j=-\sum_{l=1}^N \frac{\partial \Pi_l}{\partial q_j}=-\frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{l=1}^N \Pi_l=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$Q_j=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad - \text{обобщенная сила}$$

$$\text{Тогда ур-е Лагранжа:} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\text{принимает вид:} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

Ведем функцию Лагранжа (Лагранжан)

$$L=K-\Pi=L(q, \dot{q}, t)$$

- разность кинетической и потенциальной энергии системы, выраженная через обобщенные координаты, обобщенные скорости и время.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \; j=1\ldots S$$

- уравнение Лагранжа относительно функции Лагранжа

(S - число степеней свободы)

Уравнение применимо для систем с идеальными голономными связями, и где работа непотенциальных сил = 0

обобщенный импульс - частные производные функции Лагранжа по обобщенной скорости

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \; j=1\ldots S$$

$$[p]=\frac{[Дж \cdot c]}{[q]}=$$

$$[q]=\text{м} \Rightarrow [P]=[mv]$$

$$[q]=1 \Rightarrow [P]=[mvr]$$

Физический смысл: обобщенный импульс - это проекция импульса на ось или момент импульса относительно некоторой оси.

Закон изменения обобщенного импульса

$$\dot{p}_j=\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ скорость изменения обобщенного импульса равна частной производной ф-ции Лагранжа по соответствующей обобщенной координате.

циклическая обобщенная координата - координата, которая не входит явно в ф-цию Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \Rightarrow p_j=const$$

Закон сохранения обобщенного импульса: обоб. импульс, соответствующий циклической обоб. координате, сохраняется

24. Уравнения Гамильтона. Канонические переменные

Канонические переменные - обобщённые координаты {q} и обобщённые импульсы {p} системы.

Уравнения движения, записанные в этих переменных, называются уравнениями Гамильтона.

Рассмотрим системы с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{ -ур-е Лагранжа}$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t) \text{ -функция Лагранжа}$$

Дифференциал L:

$$dL = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

S - число степеней свободы

$$dL = \sum_{j=1}^S (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Введём ф-ю: $H = \sum_{j=1}^S q_j p_j - L = H(q, p, t)$ - функция Гамильтона (гамильтониан)

$$dH = \sum_{j=1}^S (q_j dp_j + p_j dq_j) - dL = \sum_{j=1}^S (q_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Выразим функцию H через канонические переменные и время:

$$H = H(q, p, t)$$

$$dH = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых дифференциалах:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \text{ - уравнения Гамильтона}$$

25. Гамильтониан консервативной системы

$$\text{Закон изменения Гамильтониана: } \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{уравнения Гамильтона: } \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \text{ и } \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{array} \right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^S (-\dot{p}_j \dot{q}_j + q_j \dot{p}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

q_j - обобщенная координата; p_j - обобщенный импульс
консервативная система - система, гамильтониан которой не зависит явно от времени т.е. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = H(q, p) = const$
 $\Rightarrow$ гамильтониан консервативной системы не меняется с течением времени

Покажем, что гам. конс. системы имеет смысл ее полной механической энергии: $H = K + \Pi = H(q, p)$

S - число степеней свободы; N - число связей

$$H = \sum_{j=s}^S q_j p_j - L; \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (K - \Pi) = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \vec{v}_l; \quad \vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l; \text{ где } \dot{\vec{r}}_l = \dot{\vec{r}}_l(q_1 \dots q_s)$$

$$\vec{v}_l = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j \Rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \sum_{\alpha=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} q_\alpha \sum_{\beta=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta} q_\beta$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S q_\alpha q_\beta \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta}}_{*K} \Rightarrow$$

* $K_{\alpha\beta}(q) = K_{\beta\alpha}(q)$ - симметрическая м-ца

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta$$

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta}(q) \left(q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial \dot{q}_j} q_\beta \right) =$$

{ $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера, =0 при $\alpha \neq \beta$, =1 при $\alpha = \beta$ }

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S q_\alpha \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \delta_{\beta j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S q_\beta \sum_{\alpha=1}^S K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S q_\alpha K_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S q_\beta K_{j\beta} = \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} q_\alpha, \quad q = 1 \dots s$$

$$p_j = \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} q_\alpha$$

$$H = \sum_{j=1}^S q_j p_j - L = \sum_{j=1}^S q_j \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} q_\alpha - L = \sum_{j=1}^S \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} q_\alpha q_\beta - L =$$

$$= 2K - L = 2K - (K - \Pi) = K + \Pi \text{ ч.т.д.}$$

Пример: гамильтониан частицы в потенциальном силовом поле

$$\Pi = \Pi(x, y, z) \quad K = \frac{mv^2}{2} \quad S = 3$$

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z \quad \dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{y}, \dot{q}_3 = \dot{z}$$

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \{K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\} = m\dot{x}, \text{ ана-чно: } p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$K = \frac{m}{2} \left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2} \right) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$H = K + \Pi = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

26. Равновесие системы и его устойчивость

Равновесие - состояние, в котором система, предоставленная сама себе, может находиться сколь угодно долго.

Условие равновесия: $\vec{F}_l + \vec{R}_l = 0 \quad \forall l = 1, \dots, N$

R_l - сила реакции

Состояние равновесия: сумма сил, действующих на каждую материальную точку, должна быть равна 0.

<картинка 26.1>

$$\text{Рассмотрим систему с идеальными связями: } \sum_{l=1}^N \vec{R}_l \cdot \delta \vec{r}_l = 0$$

$$\vec{F}_l + \vec{R}_l = 0 \quad | \cdot \delta \vec{r}_l, \quad \sum$$

$$\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \delta \vec{r}_l = 0 \text{ - в состоянии равновесия вирт. работа } = 0$$

$$\delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^S \delta q_j \sum_{l=1}^N \underbrace{\vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}}_{Q_j} = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j = 0$$

Q_j - обобщенная сила

$$\text{Обобщённые координаты ЛНЗ } \Rightarrow \begin{cases} Q_j = 0 & \forall j = \overline{1, S} \end{cases}$$

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \Rightarrow \text{частные производные } \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, & j = \overline{1, S} \end{cases}$$

Значит, в состоянии равновесия потенциальная энергия имеет экстремум.

<картинка 26.2>

$$S = 1, \quad q = \alpha; \quad \Pi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

$$z_1 = -R \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right); \quad z_2 = -R \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$\Pi = -m_1 g R \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - m_2 g R \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \Pi(\alpha)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -m_1 g R \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + m_2 g R \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = 0$$

$$m_1 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = m_2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$m_1 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = m_2 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \quad | \cdot \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$m_1 (1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha) = m_2 (1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha (m_1 + m_2) = m_1 - m_2$$

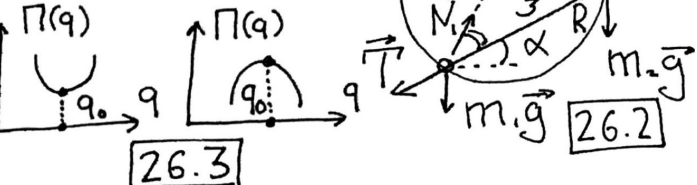
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3}(m_1 + m_2)}$$

Равновесие устойчиво, если система, выведенная из этого состояния и предоставленная самой себе, начинает двигаться в сторону положения равновесия.

Устойчивость определяется типом экстремума:

$$\begin{cases} \min \rightarrow \text{устойчиво} \\ \max \rightarrow \text{неустойчиво} \end{cases}$$

<картинка 26.3>



27. Колебания в системах с одной степенью свободы

Колебания - повторяющиеся движения в окрестности положения равновесия системы

<картинка 27.1>

Уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

x - отклонение обобщённой координаты от положения равновесия

ω - частота колебаний

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ - общее решение

A - амплитуда - максимальное отклонение

<картинка 27.2>

$\omega T = 2\pi$

φ - начальная фаза колебаний

$\Phi = \omega t + \varphi$

Фаза - аргумент тригонометрической функции, описывающей процесс колебаний

Найдём амплитуду и фазу колебаний:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A \cos \varphi \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -\omega A \sin \varphi \end{cases} \quad | : \omega \quad \text{возв. в кв., } +$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{x_0}{A}; \quad \sin \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

Как найти частоту?

Написать уравнение движения и привести его к стандартному виду $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Пример: Физический маятник

<картинка 27.3>

$$S = 1; \quad q = \varphi; \quad \dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$$

$$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\dot{q}^2}{2}; \quad \Pi = -mgl \cos \varphi$$

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}) = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$I\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad | : I$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \sin \varphi = 0$$

Малые колебания, $\Rightarrow \varphi \ll 1, \sin \varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \text{ - частота колебаний}$$

l - расстояние от оси до центра масс

$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$ - момент инерции относительно оси вращения

Примеры:

Обруч

<картинка 27.4>

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2 + mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Математический маятник

<картинка 27.5>

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ - формула Гюйгенса}$$

Пружинный осциллятор

<картинка 27.6>

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x} + k(x - l_0) - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + k \underbrace{(x - l_0 - \frac{mg}{k})}_y = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{y} \Rightarrow m\ddot{y} + ky = 0; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

28. Физические эффекты в колебательных ситемах

Колебания - повторяющиеся движения в окрестности положения равновесия системы

1) затухание колебаний

$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$

$Q = \frac{T_{\text{зат}}}{T}$ - добротность, $T_{\text{зат}}$ - время уменьшения амплитуды

<картинка 28.1>

2) зависимость периода от амплитуды колебаний

<картинка 28.2>

$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ -маятник

$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$; $\Pi = -mgl \cos \varphi$; $E = K + \Pi = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi$

$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l} \cos \varphi$ $\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\underbrace{\frac{2E}{ml^2}}_A + \underbrace{\frac{2g}{l}}_B \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

$\pm dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B \cos \varphi}} \quad \pm \int_0^t dt = \underbrace{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B \cos \varphi}}}_{\text{эллиптический интеграл}}$

эллиптический интеграл не выражается через элементарные функции

<картинка 28.3>

3) параметрический резонанс - явление раскачки колебаний при периодич. изменении параметров тех элементов колебат. системы, в к-рых сосредотачивается энергия колебаний

<картинка 28.4>

4) резонанс

вынужденные колебания - колебания, которые происходят под действием периодически изменяющихся внешних сил

$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad f(t) = f_0 \cos \omega t$

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$

- из показательной записи комплексного числа

$f(t) = \frac{1}{2} f_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}); \quad x(t) = \frac{1}{2} A (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

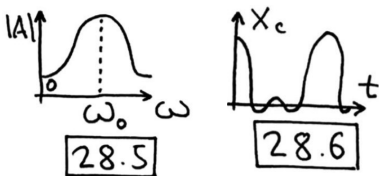
$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha}$ - амплитуда

Резонанс - явление увеличения амплитуды при совпадении частоты изменения внешней силы с собственной частотой колебания системы

ω_0 - резонансная частота

<картинка 28.5>

<картинка 28.6>



29. Нормальные колебания. Нормальные координаты

Рассмотрим колебания связанных осцилляторов

<картинка 29.1>

$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$ - уравнения движения связаны

Сложим и вычтем ур-я

$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1) \end{cases}$

Введём новые координаты $\begin{cases} \theta_1 = x_1 + x_2 \\ \theta_2 = x_2 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \\ x_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0, & \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0, & \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$

ω_1, ω_2 - собственные частоты

Для θ_1, θ_2 получены независимые уравнения движения, каждое имеет вид уравнения гармонических колебаний

θ_1, θ_2 - нормальные координаты

Нормальные координаты - при любых движениях системы изменяются независимо друг от друга

Из независимости норм. координат следует, что возможны колебания, при которых отлична от 0 только одна норм. координата. Такие колебания называют нормальными

Нормальные колебания - колебания на одной из собственных частот системы

① Нормальные колебания на частоте $\omega_1 \Rightarrow \theta_2 = 0$

$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A \cos \varphi \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -\omega A \sin \varphi \end{cases} \mid : \omega \quad \text{возв. в кв., +}$

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}$

$\theta_{20} = 0 \Rightarrow x_{20} = x_{10}$

$\dot{\theta}_{20} = 0 \Rightarrow \dot{x}_{20} = \dot{x}_{10} = 0$

<картинка 29.2>

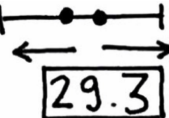
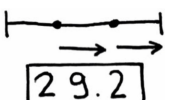
② Нормальные колебания на частоте $\omega_2 \Rightarrow \theta_1 = 0$

$\theta_{10} = 0, \quad \dot{\theta}_{10} = 0$

$x_{10} = -x_{20}; \quad \dot{x}_{10} = -\dot{x}_{20}$

<картинка 29.3>

Понятия нормальных координат и нормальных колебаний имеют смысл для систем с любым числом степеней свободы.



30. Колебания струны

Колебания - повторяющиеся движения в окрестности положения равновесия системы

Волна - колебани, распространяющиеся в сплошной среде

<картинка 30.1>

Введем линейную плотность $\rho = \frac{m}{l}$

<картинка 30.2>

$dm da = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \sin \beta - T \sin \alpha$

Рассмотрим малые колебания: $\alpha, \beta \ll 1$

$\sin \alpha \approx \tg \alpha = \left. \frac{dy}{dx} \right|_x = y'(x), \quad \sin \beta \approx \tg \beta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+dx} = y'(x + dx)$

$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(y'(x + dx) - y'(x)) = T(y''(x) dx)$

$dm = \rho dx; \quad \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$\frac{T}{\rho} \equiv \nu^2 \left[\frac{m^2}{c^2} \right]$ - фазовая скорость

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ - волновое уравнение

общее решение волнового уравнения:

$y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$

f_1 описывает волну, бегущую вдоль оси x со скоростью v

f_2 описывает волну, бегущую против оси x с такой же скоростью v

$x - vt = const \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v$

стоячая волна - волна, которая описывается произведением ф-ции времени на ф-цию координаты

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad y(x, t) = \chi(x) \cdot \Theta(t) \Rightarrow \chi \ddot{\Theta} = \nu^2 \ddot{\Theta} \chi''$

разделим переменные

$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = \nu^2 \frac{\chi''}{\chi} = const \equiv -\omega^2$

* не зависит от x; ** не зависит от t

частные решения этих уравнений:

$\Theta(t) = A \sin \omega t \quad \chi(x) = B \sin kx$

$\Rightarrow y(x, t) = C \sin kx \cdot \sin \omega t$

граничные условия:

$y(x=0) = 0, \quad y(x=l) = 0 \Rightarrow \chi(x=0) = \chi(x=l) = 0$

$\sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}$

Обозначим $k_n = n \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

<картинка 30.3>

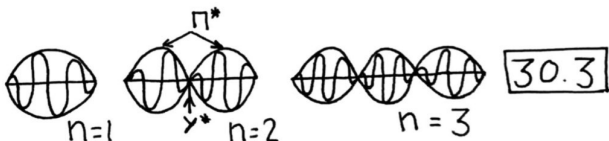
*Узел стоячей волны: A = 0

*Пучность стоячей волны: A = max

$k = \frac{\omega}{\nu} \Rightarrow \quad \omega_n = \nu k_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \left(n \frac{\pi}{l} \right) = \sqrt{\frac{Tl}{m}} n \frac{\pi}{l} = \pi n \sqrt{\frac{T}{lm}}$

$n = 1, \quad \omega_1$ - частота тона

$n = 2, 3 \quad \omega_{2,3}$ - частота обертона



31. Движение тел из многих частиц. Случайные события

Случайное событие - событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить.

Вероятность случайного события - отношение числа появления событий в серии испытаний в пределе при числе испытаний $\rightarrow \infty$ к числу испытаний

$\mathbb{P} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{NA}{N}$

Аксиома сложения вероятностей: вероятность одного из взаимоисключающих событий = сумме их вероятностей.

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad AB = \emptyset$

Аксиома умножения вероятностей: вероятность наступления независимых случайных событий равна произведению их вероятностей:

$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Случайная величина - величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно повторить.

Распределение плотности вероятности - отношение вероятности попадания случайной величины в малый интервал вблизи заданного значения в пределе при длине интервала $\rightarrow 0$ к длине интервала.

$\omega(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$

$\omega \geq 0 \quad [\omega] = \frac{1}{[x]}$

Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$

Правило вычисления средних: $\overline{f(x)} \equiv \langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \omega(x) dx$

Среднее значение случ. величины (мат. ожидание):

$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega(x) dx$

Дисперсия - средний квадрат отклонения сл. в. от её среднего значения:

$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$



Гауссово распределение: $\omega(x) = ce^{\alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

<картинка 31.1>

Многомерная плотность вероятности - отношение вероятности попадания нескольких случ. величин в малые интервалы вблизи зад. знач. к произведению длин интервалов в пределе при длине интервалов $\rightarrow 0$

$\omega(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x; y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$

Нормировка: $\iint_{\mathbb{R}^2} \omega(x, y) dx dy = 1$

Правило вычисления средних:

$\mathbb{E}f = \overline{f} = \langle f \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \omega(x, y) dx dy$

Понижение порядка распределения: $\begin{cases} \omega_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega(x, y) dy \\ \omega_2(y) = \int_{\mathbb{R}} \omega(x, y) dx \end{cases}$

Для независимых случайных величин многомерная плотность равна произведению одномерных: $\omega(x, y) = \omega_1(x) \omega_2(y)$

32. Распределение Гиббса

Основной закон статистической механики равновесных систем: в состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы определяется *формулой Гиббса*:

ω(z) = ce^{-H(z)/kT}

c = const
H(z) - гамильтониан; H = K + Π (в консервативной системе)
z - обобщ. координаты + обобщ. импульсы; z = {q, p}
k = 1,38 · 10⁻²³ Дж/градус - постоянная Больцмана
T - абсолютная температура системы; T = 273 + t°
Термодинамическое равновесие - состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

T1 | T2 → T | T

Градус Цельсия - единица измерения температуры - одна сотая часть интервала между T плавления льда и T кипения воды при нормальных условиях.
<картинка 32.1>
Ткипения = 100°С
Ттавления = 0°С
* - ргуть

Распределение молекул по скоростям
ω(vx, vy, vz) = ce^{-m(vx²+vy²+vz²)/2kT} - *распределение Максвелла*
m - масса молекулы
⇒ декартовы компоненты скорости представляют собой статистически независимые случ. величины

ω(vx) = ce^{-mvx²/2kT} vx ∈ ℝ - *распределение Гаусса*

Вычислим дисперсию скорости молекулы газа:

v²x = ∫^{+∞}_{-∞} vx²ω(vx)dvx
dω(vx) = -m/2kT · 2vxω(vx)dvx ⇒ vx dω(vx) = -m/kT · vx²ω(vx)dvx
∫^{+∞}_{-∞} vx dω = -m/kT ∫^{+∞}_{-∞} vx²ωdvx = -m/kT · v²x
∫^{+∞}_{-∞} vx dω = {по частям} = vxω|^{+∞}_{-∞} - ∫^{+∞}_{-∞} ωdvx ⇒ v²x = kT/m

* - из нормировки распределения плотности вероятности
Распределение частиц во внешнем силовом поле

ω(x, y, z) = ce^{-Π(x,y,z)/kT} - *Распределение Больцмана*
c - нормированная постоянная
Π - потенциальная энергия
Пример: однородное поле тяготения
<картинка 32.2>

Π = Π(z) = mgz; ω(z) = ce^{-mgz/kT}, 0 < z < +∞

Найдём среднюю высоту частиц в поле силы тяжести:

z̄ = ∫^{+∞}₀ zω(z)dz = c ∫^{+∞}₀ ze^{-mgz/kT} dz
dω(z) = ω(z) (-mg/kT) dz
∫ z dω = -mg/kT ∫ zωdz = -mg/kT z̄
∫ z dω = zω(z)|^{+∞}₀ - ∫^{+∞}₀ ωdz ⇒ -1 = -mg/kT · z̄ ⇒ z̄ = kT/mg

33. Размер и масса молекул

идеальный газ - газ не взаимодействующих частиц (силы взаимодействия малы)
Рассмотрим сосуд: V - объем, N - число молекул, T - температура, p - давление. p = ?
концентрация молекул - отношение числа молекул к объему сосуда, в котором они находятся n = N/V [м⁻³]
<картинка 33.1>

рассм. vx ∈ d[vx, vx + dvx], dt

Найдём dp - порц. давл., оказ. частицами, имеющими скорость vx

dp = 2mvx · 1/dt · 1/S · Svxdt · n · ω(vx)dvx = 2mnvx²ω(vx)dvx [Па]

1 - импульс 3 - давление 5 - число молекул
2 - сила 4 - объем 6 - вероятность скорости

p = ∫ dp = 2mn ∫^{+∞}₀ vx²ω(vx)dvx = mn ∫^{+∞}_{-∞} vx²ω(vx)dvx =
= mnvx² = mn · kT/m = nkT ⇒ p = nkT

рассм. воздух при нормальных условиях:

p0 = 10⁵ Па T0 = 273K ρ0 = 1,3 кг/м³
p0 = n0kT0 ⇒ n0 = p0/kT0 = 2,7 · 10²⁵ м⁻³

n0 = N/V; ρ0 = m/V = m0N/V = m0n0 ⇒ m0 = ρ0/n0 = 0,5 · 10⁻²⁵ кг
жидкость несжимаема ⇒ плотность жидкости ≈ плотность в-ва в одной молекуле
d - диаметр молекул воздуха

ρж = 10³ кг/м³ = m0/d³ ⇒

d = √[3]{m0/ρж} = 3 · 10⁻¹⁰ м {= 3 Амгстрема, A = 10⁻¹⁰}

оценим среднее расстояние между молекулами воздуха:

n0 = N/V, N = 1 V = l³ = 1/n0 ⇒ l = 1/√[3]{n0} ≈ s · 10⁻⁹ = 30А

vT -средняя тепловая скорость

vt = √v²x = √kT/m0 = 300 м/с

среднее время свободного пробега

τ = 10⁻¹⁰ с

измерение постоянной Больцмана. Опыт Перрена
<картинка 33.2>

m - масса частицы, d - расстояние,
ρ - плотность частицы, ρ0 - плотность среды

ℰz = z̄ = kT/mg ⇒ k = mgz̄/T; V = 4/3 π R³ = π/6 d³

ρ = 1,2 · 10³ кг/м³ ρ0 = 10³ кг/м³

d = 0,4 · 10⁻⁶ м; z̄ = 60 · 10⁻⁶ м

тогда: k = (ρ - ρ0) · d³ g z̄ / T = 1,38 · 10⁻²³ Дж/градус

34. Распределение энергии по степеням свободы

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы - в состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная

1/2 kT
k = 1,38 · 10⁻²³ Дж/градус - пост. Больцмана; T = t° + 273

Квадратичная степень свободы - переменная, вклад которой в гамильтониан системы пропорционален квадрату этой переменной

Пример: гам. частицы в поле потенциальной силы

H(z) = az1² + H'(z') z' = z/z1 a' = a(z')
H = 1/2m(p²x + p²y + p²z) + Π(x, y, z)
az1² = ∫ az1² · ω(z)dz
ω(z) = c · exp{H(z)/kT} - распределение энергии
ω(z) = c · exp{-az1²/kT} · exp{-H'(z')/kT}; dz = dz1 · dz'
= c ∫^{+∞}_{-∞} exp{-H'(z')/kT} dz' · ∫^{+∞}_{-∞} az1² · exp{-az1²/kT} dz1
= 1/2 kT z1 · exp{-az1²/kT}|^{+∞}_{-∞} + 1/2 kT ∫^{+∞}_{-∞} exp{-az1²/kT} dz1
⇒ I = -1/2 kT ∫^{+∞}_{-∞} z1 d exp{-az1²/kT} = {по частям} =
= -1/2 kT z1 · exp{-az1²/kT}|^{+∞}_{-∞} + 1/2 kT ∫^{+∞}_{-∞} exp{-az1²/kT} dz1 =
⇒ az1² = kT/2 ∫^{+∞}_{-∞} c · exp{-H'(z')/kT} dz' ∫^{+∞}_{-∞} exp{-az1²/kT} dz1 =
= kT/2 ∫^{+∞}_{-∞} c · exp{-H(z)/kT} dz = kT/2 · 1 = 1/2 kT ч.т.д.

Физ. смысл абсолютной температуры системы - мера средней кинетической энергии частиц, составляющих систему

Внутр. энергия - энергия движения и взаимодействия частиц, составляющих систему.
В стат. механике внутр. эн. определяется как среднее значение гамильтониана системы.

U = H̄ = K̄ + Π̄ = {для идеального газа} = K̄ =
= N · K0 = N · S · 1/2 · kT = N/NA · S · k · NA · T/2 = ν · S · R · T/2
ν = N/NA - число молей газа; S - число степеней свободы
NA = 6,02 · 10²³ моль⁻¹ - число Авогадро
R = k · NA = 8,31 Дж/моль · градус - универсальная газовая постоянная
Теплоёмкость идеального газа

C = dQ/dT; dQ = du + dA; dA = p · dV
V = const ⇒ dV = 0 ⇒ dA = 0 ⇒ dQ = du ⇒
CV = du/dT = ν · R · S · 1/2 ⇒ S = 2CV/νR

He → S = 3
N → S = 5
<картинка 34.1>

Факты, подтверждающие распределение Гиббса (ω(z) = ce^{-H(z)/kT}):

① свойства газов:
p = nkT, n = N/V
pV = NkT = N/NA · kNA T = νRT - уравнение Менделеева-Клапейрона

② распределение воздуха в атмосфере Земли:
ω(z) = c · exp{-mgz/kT} ~ n(z) ⇒ n(z) = n(0) · exp{-mgz/kT}
z̄ = ∫^{+∞}₀ zω(z)dz ⇒ z̄ = kT/mg

m = 0,5 · 10⁻²⁵ кг; T = 273K; g ≈ 10 м/с²; k = 1,38 · 10⁻²³ Дж/градус
⇒ z̄ = 8км

<картинка 34.2>

35. Диффузия и теплопроводность

диффузия - проникновение одного вещь-ва в другое
закон диффузии: плотность потока частиц пропорциональна градиенту их концентрации
<картинка 35.1>

n = n(x) = N/V [1/м³] - концентрация
jx = δNx/δt = -D ∂n/∂x -плотность потока частиц вдоль оси x

<картинка 35.2>

[D] = [jx] · [x]/[n] = 1 · м · м³ / м² · с = м²/с
коэффициент диффузии - коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и grad их концентрации
выведем ур-е диффузии
<картинка 35.3>

ΔN⁽⁺⁾ = jx(x)Sdt -частиц пришло
ΔN⁽⁻⁾ = jx(x + dx)Sdt -частиц ушло
ΔN = ΔN⁽⁺⁾ - ΔN⁽⁻⁾ = (jx(x) - jx(x + dx))Sdt = -∂jx/∂x dx S dt = dN

dn = dN/dV = -∂jx/∂x dt ⇒ ∂n/∂t = -∂jx/∂x ⇒ ∂n/∂t + ∂jx/∂x = 0
jx = -D ∂n/∂x; ∂jx/∂x = -D ∂²n/∂x²

∂n/∂t = D ∂²n/∂x² -уравнение диффузии
теплопроводность - процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле
закон теплопроводности: плотность потока тепла пропорциональна grad температуры

T = T(x); jx = -κ ∂T/∂x; jx = ΔQx/SΔt [Дж/м² · с = Вт/м²]

jx - плотность потока тепла вдоль оси x
κ - коэффициент теплопроводности - это коэфф. пропорциональности между плотностью потока тепла и grad температуры
<картинка 35.4>

[κ] = [jx] · [x]/[T] = Вт/м · градус
вывод у-я теплопроводности
<картинка 35.5>

ΔQ⁽⁺⁾ = jx(x)Sdt -тепла пришло
ΔQ⁽⁻⁾ = jx(x + dx)Sdt -тепла ушл
ΔQ = ΔQ⁽⁺⁾ - ΔQ⁽⁻⁾ = (jx(x) - jx(x + dx))Sdt = -∂jx/∂x dx S dt

ΔQ = cpΔTΔV = -∂jx/∂x dV dt; ∂T/∂t + 1/cp ∂jx/∂x = 0

∂T/∂t - κ/cp ∂²T/∂x² = 0 - уравнение теплопроводности

36. Вязкость жидкости

вязкость жидкости - св-во жидкости препятствовать движению соприкасающихся тел
<картинка 36.1>
закон вязкости: плотность потока импульса пропорциональна градиенту скорости

$v_x = v_x(y); \frac{dp_x}{Sdt} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$

коэффициент вязкости - коэф. пропорциональности между плотностью потока импульса и grad скорости

$[\eta] = \frac{кг \cdot м}{м^2 \cdot с} = \frac{кг \cdot м \cdot с}{м^2 \cdot с^2} = Па \cdot с$

для воды $[\eta] = 10^{-3}$ Па·с
для воздуха $[\eta] = 10^{-5}$ Па·с
Сила вязкого трения
<картинка 36.2>

$F_x = \frac{dp_x}{dt} = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}; \frac{\partial v_x}{\partial y} = const = \frac{v}{h}$

$F = \eta S \frac{v}{h}$

Уравнение движения вязкой жидкости
<картинка 36.3>

$dp_x^{(+)} = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_y dt; dp_x^{(-)} = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y+dy} dt$

$dp_x = dp_x^{(+)} - dp_x^{(-)} = \eta S \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y+dy} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_y \right) dt = \eta S \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy dt = \eta dV \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dt = dp_x = dm dv_x = \rho dV dv_x$

$\rho \frac{dV_x}{dt} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

37. Движение вязкой жидкости

<картинка 37.1>
 η - коэффициент вязкости
Центр масс данного элемента жидкости движется равномерно $\Rightarrow \sum \text{сил} = 0$

$\Delta p \cdot \pi r^2 + \eta S \frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow \Delta p \cdot \pi r^2 + \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} = 0$

$dv = -\Delta p \cdot r \cdot \frac{dr}{2\eta l}$

$\int_{v_0}^v dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^r r dr \Rightarrow v - v_0 = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^r \Rightarrow v = v_0 - \frac{\Delta p}{2\eta l} \cdot \frac{r^2}{2}$

$v(R) = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$
 $v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$

<картинка 37.2>
Закон Пуазейля

$dV = t \cdot v(r) \cdot 2\pi r dr$

$V = \int dV = 2\pi t \int_0^R v(r) r dr = 2\pi t \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = \pi t v_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) d(r^2) = \pi t v_0 \left(R^2 - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{R^4}{2} \right) = 2\pi t v_0 \cdot \frac{R^2}{4} = \pi t \cdot \frac{\Delta p}{4\eta l} \cdot \frac{R^4}{2}$

$V = t \cdot \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta l} \cdot R^4$ - формула Пуазейля (количество жидкости, которое вытечет за время t через поперечное сечение радиуса R)

38. Уравнение динамики сплошной среды

рассмотрим распространение звука в сплошной среде
<картинка 38.1>

$[x] = м \quad [t] = с \quad [p] = Па = \frac{кг}{м \cdot с^2} \quad [v_x] = \frac{м}{с}$

уравнение движения элемента сплошной среды
<картинка 38.2>

$\frac{dm}{dx} S = \rho S dx \Rightarrow dm = \rho dV = \rho S dx$

$dm \frac{\partial v_x}{\partial t} = p(x)S - p(x+dx)S = -S(p(x+dx) - p(x)) = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx; dx \rightarrow 0$

$\rho S dx \frac{\partial v_x}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \Rightarrow \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

- уравнение движения элемента сплошной среды

ур-е непрерывности
<картинка 38.3>

$dm^{(+)} = v_x(x)\rho(x)Sdt; dm^{(-)} = v_x(x+dx)\rho(x+dx)Sdt$

$dm = dm^{(+)} - dm^{(-)} = Sdt(v_x(x)\rho(x) - v_x(x+dx)\rho(x+dx)) = \{dx \rightarrow 0\} = -Sdt \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx$

$Sdx = dV; dm = \rho dV \Rightarrow \rho dV = -dV dt \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0$ - уравнение непрерывности

39. Звуковая волна

Рассм. достаточно слабый звук:

$\begin{cases} p = p_0 + p', & |p'| \ll p_0 \\ \rho = \rho_0 + \rho', & |\rho'| \ll \rho_0 \end{cases} \quad p', \rho' - \text{вызвано звук. волной}$

$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 - \text{ур-е движения элемента сплошной среды} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 - \text{ур-е непрерывности} \end{cases}$

Уравнение состояния среды - зависимость давления среды от плотности $p = p(\rho)$
<картинка 39.1>

$\frac{p'}{\rho'} = const \equiv C_0^2 \quad [C_0] = \left[\frac{м}{с} \right] - \text{скорость звука} \quad p' = C_0^2 \rho'$
 $\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + C_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 & | \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$

$\rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + C_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + C_0^2 \rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = -C_0^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$

Решение утого ур-я:

$v_x(x, t) = f_1(x - C_0 t) + f_2(x + C_0 t)$

$C_0^2 = \frac{p'}{\rho'} = \frac{dp}{d\rho}$

$\gamma = \frac{C_p}{C_V}, \quad pV^\gamma = const$ -ур-е изэнтропийного процесса

Изэнтропийный процесс процесс - термодинамический процесс, протекающий при постоянной энтропии: $dS = \frac{\delta Q}{T} = 0$.

dS - приращ. энтропии; δQ - получ. кол-во тепл.; T - темп. окруж.

C_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении
 C_V - удельная теплоемкость при постоянном объеме

$R = 8.31 \frac{Дж}{Моль \cdot К}$ - универсальная газовая постоянная

$C_p = C_V + R \quad \gamma = 1 + \frac{R}{C_V} = 1 + \frac{1}{5/2} = \frac{7}{5}$ - для воздуха

$\rho = \frac{m}{V}, \quad m = const, \quad V = \frac{m}{\rho}$

$p = const \cdot \rho^\gamma$

$dp = const \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho = \gamma \cdot \frac{p}{\rho} d\rho$

$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma}{\rho} p \approx \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = C_0^2 \Rightarrow C_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$

$p_0 = 10^5 \text{ Па}, \quad \rho = 1,3 \frac{кг}{м^3}, \quad \gamma = \frac{7}{5} \Rightarrow C_0 \approx 330 \frac{м}{с}$